

11. Hallar las ecuaciones de los planos proyectantes de la recta de intersección de los planos de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 5z + 6 &= 0 \\ 3x - 2y + z - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Para hallar los planos proyectantes basta eliminar, sucesivamente,  $z$ ,  $y$  y  $x$  entre las dos ecuaciones; se obtienen los planos  $17x - 7y - 34 = 0$ ,  $13x - 7z - 12 = 0$  y  $13y - 17z + 34 = 0$ , que son los proyectantes de la recta sobre los planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ .

12. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $(1, -2, 2)$  y cuyos ángulos de dirección son  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $45^\circ$ .

Teniendo en cuenta  $\frac{x-x_1}{\cos \alpha} = \frac{y-y_1}{\cos \beta} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma}$ , resulta

$$\frac{x-1}{\cos 60^\circ} = \frac{y+2}{\cos 120^\circ} = \frac{z-2}{\cos 45^\circ}, \text{ o sea, } \frac{x-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{y+2}{-\frac{1}{2}} = \frac{z-2}{\frac{1}{2}\sqrt{2}},$$

$$\text{o bien, } \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{\sqrt{2}}$$

13. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos  $(-2, 1, 3)$  y  $(4, 2, -2)$ .

Teniendo en cuenta  $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ , se obtiene  $\frac{x+2}{4+2} = \frac{y-1}{2-1} = \frac{z-3}{-2-3}$ ,

$$\text{o sea, } \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-5}.$$

14. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $(1, -3, 4)$  y es perpendicular al plano  $x - 3y + 2z = 4$ .

Las componentes de la recta son  $1, -3, 2$ .

Las ecuaciones pedidas son  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-4}{2}$  o bien,  $3x + y = 0, 2y + 3z - 6 = 0$ .

15. Hallar la ecuación del plano formado por las rectas

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3} \quad \text{y} \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{3}.$$

Obsérvese que las rectas se cortan en el punto  $(1, -1, 2)$ .

Apliquemos la ecuación  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Como las dos rectas pertenecen al plano, serán perpendiculares a la normal a éste. Por tanto,

$$\begin{aligned} 4A + 2B + 3C &= 0 \\ 5A + 4B + 3C &= 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, el punto  $(1, -1, 2)$  también pertenece al plano. Luego,

$$A - B + 2C + D = 0.$$

Como tenemos cuatro incógnitas y solamente tres ecuaciones, despejemos tres de aquéllas en función de la cuarta (sistema indeterminado con infinitas soluciones).

Despejando  $A, C, D$  en función de  $B$  resulta:  $A = -2B, C = 2B, D = -B$ . Sustituyendo estos valores en la ecuación general y dividiendo por  $B$  se obtiene,  $2x - y - 2z + 1 = 0$ .

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar las coordenadas del punto de la recta

a)  $2x - y + z - 5 = 0, x + 2y - 2z - 5 = 0$ , para  $z = 1$ .

Sol.  $(3, 2, 1)$ .

b)  $4x - 3y + 2z - 7 = 0, x + 4y - z - 5 = 0$ , para  $y = 2$ .

Sol.  $(7/6, 2, 25/6)$ .

c)  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$ , para  $x = 3$ .

Sol.  $(3, -14/3, 5/3)$ .

d)  $2x = 3y - 1, 3z = 4 - 2y$ , para  $x = 4$ .

Sol.  $(4, 3, -2/3)$ .

e)  $x = 4 - 3t, y = -1 + 4t, z = 2t - 3$ , para  $t = 3$ .

Sol.  $(-5, 11, 3)$ .

2. Hallar los puntos de intersección con los planos coordenados de las rectas siguientes. Dibujar estas rectas uniendo dos de los puntos de intersección.

a)  $x - 2y + z = 0, 3x + y + 2z = 7.$  Sol.  $(2, 1, 0), (7, 0, -7), (0, 7/5, 14/5).$   
 b)  $2x - y + 3z + 1 = 0, 5x + 4y - z - 6 = 0.$  Sol.  $\left(\frac{2}{13}, \frac{17}{13}, 0\right), (1, 0, -1), \left(0, \frac{17}{11}, \frac{2}{11}\right).$   
 c)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{-1}.$  Sol.  $(13, 3, 0), (7, 0, 3), (0, -7/2, 13/2).$   
 d)  $2x + 3y - 2 = 0, y - 3z + 4 = 0.$  Sol.  $(7, -4, 0), (1, 0, 4/3), (0, 2/3, 14/9).$   
 e)  $x + 2y - 6 = 0, z = 4.$  Sol.  $(6, 0, 4), (0, 3, 4).$

3. Hallar las componentes y los cosenos directores de las rectas:

a)  $3x + y - z - 8 = 0, 4x - 7y - 3z + 1 = 0.$  Sol.  $2, -1, 5; \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}.$   
 b)  $2x - 3y + 9 = 0, 2x - y + 8z + 11 = 0.$  Sol.  $6, 4, -1; \frac{6}{\sqrt{53}}, \frac{4}{\sqrt{53}}, \frac{-1}{\sqrt{53}}.$   
 c)  $3x - 4y + 2z - 7 = 0, 2x + y + 3z - 11 = 0.$  Sol.  $14, 5, -11; \frac{14}{3\sqrt{38}}, \frac{5}{3\sqrt{38}}, \frac{-11}{3\sqrt{38}}.$   
 d)  $x - y + 2z - 1 = 0, 2x - 3y - 5z - 7 = 0.$  Sol.  $11, 9, -1; \frac{11}{\sqrt{203}}, \frac{9}{\sqrt{203}}, \frac{-1}{\sqrt{203}}.$   
 e)  $3x - 2y + z + 4 = 0, 2x + 2y - z - 3 = 0.$  Sol.  $0, 1, 2; 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}.$

4. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas  $x - 2y + z - 2 = 0, 2y - z - 1 = 0$   
 $y \ x - 2y + z - 2 = 0, x - 2y + 2z - 4 = 0.$  Sol.  $78^\circ 27,8'.$

5. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas  $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{6}$  y  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{6}$   
 $= \frac{z+4}{-2}.$  Sol.  $79^\circ 1'.$

6. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas  
 $2x + 2y + z - 4 = 0, x - 3y + 2z = 0$  y  $\frac{x-2}{7} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-4}{-6}.$  Sol.  $49^\circ 26,5'.$

7. Hallar el ángulo agudo formado por la recta  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{-6}$  y el plano  $2x - 2y$   
 $+ z - 3 = 0.$  Sol.  $26^\circ 23,3'.$

8. Hallar el ángulo agudo que forma la recta que pasa por los puntos  $(3, 4, 2), (2, 3, -1)$  con la que  
 une  $(1, -2, 3), (-2, -3, 1).$  Sol.  $36^\circ 19'.$

9. Demostrar que la recta  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$  es paralela al plano  $6x + 7y - 5z - 8 = 0.$

10. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $(2, 1, -2)$  y es perpendicular al plano  
 $3x - 5y + 2z + 4 = 0.$  Sol.  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{2}.$

11. Hallar las ecuaciones de la recta,

a) Que pasa por el punto  $(2, -1, 3)$  y es paralela al eje  $x.$  Sol.  $y + 1 = 0, z - 3 = 0.$   
 b) Que pasa por el punto  $(2, -1, 3)$  y es paralela al eje  $y.$  Sol.  $x - 2 = 0, z - 3 = 0.$   
 c) Que pasa por el punto  $(2, -1, 3)$  y es paralela al eje  $z.$  Sol.  $x - 2 = 0, y + 1 = 0.$   
 d) Que pasa por el punto  $(2, -1, 3)$  y tiene de cosenos directores  $\cos \alpha = \frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{1}{3}.$

Sol.  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{\pm\sqrt{23}}.$

12. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $(-6, 4, 1)$  y es perpendicular al plano  $3x - 2y + 5z + 8 = 0$ .  
Sol.  $2x + 3y = 0, 5y + 2z - 22 = 0$ .
13. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $(2, 0, -3)$  y es perpendicular al plano  $2x - 3y + 6 = 0$ .  
Sol.  $3x + 2y - 6 = 0, z + 3 = 0$ .
14. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $(1, -2, -3)$  y es perpendicular al plano  $x - 3y + 2z + 4 = 0$ .  
Sol.  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+3}{2}$ .
15. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos  $(2, -3, 4)$  y  $(5, 2, -1)$ .  
Sol.  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-4}{-5}$ .
16. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos
- $(1, 2, 3)$  y  $(-2, 3, 3)$ . Sol.  $x + 3y - 7 = 0, z = 3$ .
  - $(-2, 2, -3)$  y  $(2, -2, 3)$ . Sol.  $x + y = 0, 3y + 2z = 0$ .
  - $(2, 3, 4)$  y  $(2, -3, -4)$ . Sol.  $x - 2 = 0, 4y - 3z = 0$ .
  - $(1, 0, 3)$  y  $(2, 0, 3)$ . Sol.  $y = 0, z = 3$ .
17. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos  $(1, -2, 3)$  y es paralela a los planos  $2x - 4y + z - 3 = 0$  y  $x + 2y - 6z + 4 = 0$ .  
Sol.  $\frac{x-1}{22} = \frac{y+2}{13} = \frac{z-3}{8}$ .
18. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $(1, 4, -2)$  y es paralela a los planos  $6x + 2y + 2z + 3 = 0$  y  $3x - 5y - 2z - 1 = 0$ .  
Sol.  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+2}{-6}$ .
19. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $(-2, 4, 3)$  y es paralela a la recta que pasa por  $(1, 3, 4)$  y  $(-2, 2, 3)$ .  
Sol.  $x - 3y + 14 = 0, y - z - 1 = 0$ .
20. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $(3, -1, 4)$  y es perpendicular a las rectas cuyas componentes son  $3, 2, -4$  y  $2, -3, 2$ .  
Sol.  $\frac{x-3}{8} = \frac{y+1}{14} = \frac{z-4}{13}$ .
21. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $(2, 2, -3)$  y es perpendicular a las rectas cuyas componentes son  $2, -1, 3$  y  $-1, 2, 0$ .  
Sol.  $x - 2y + 2 = 0, y + z + 1 = 0$ .
22. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $(2, -2, 4)$  y cuyos ángulos de dirección son  $120^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ .  
Sol.  $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{\sqrt{2}}$ .
23. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $(-2, 1, 3)$  y cuyos ángulos de dirección son  $135^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ .  
Sol.  $\frac{x+2}{-\sqrt{2}} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$ .
24. Hallar las ecuaciones de la recta,
- Que pasa por el punto  $(0, 2, -1)$  y tiene de componentes,  $1, -3, 4$ .  
Sol.  $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{4}$ .
  - Que pasa por el punto  $(-1, 1, -3)$  y tiene de componentes,  $\sqrt{2}, 3, -4$ .  
Sol.  $\frac{x+1}{\sqrt{2}} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{-4}$ .
  - Que pasa por el punto  $(0, 0, 0)$  y tiene de componentes  $1, 1, 1$ .  
Sol.  $x = y = z$ .
  - Que pasa por el punto  $(-2, 3, 2)$  y tiene de componentes,  $0, 2, 1$ .  
Sol.  $x + 2 = 0, y - 2x + 1 = 0$ .
  - Que pasa por el punto  $(1, -1, 6)$  y tiene de componentes,  $2, -1, 1$ .  
Sol.  $x = 2z - 11, y = -z + 5$ .

25. Demostrar que la recta  $x = \frac{2}{7}z + \frac{15}{7}$ ,  $y = -\frac{5}{7}z - \frac{34}{7}$  es perpendicular a la recta  $x - y - z - 7 = 0$ ,  $3x - 4y - 11 = 0$ .
26. Demostrar que las rectas  $x + 2y - z - 1 = 0$ ,  $x + y + 1 = 0$  y  $\frac{7x-15}{2} = \frac{7y+34}{-5} = \frac{z}{1}$  son perpendiculares.
27. Demostrar que las rectas  $3x - 2y + 13 = 0$ ,  $y + 3z - 26 = 0$  y  $\frac{x+4}{5} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{1}$  son perpendiculares.
28. Demostrar que las rectas  $\frac{x-3}{1} = \frac{y+8}{-2} = \frac{z+6}{-11}$  y  $3x + 5y + 7 = 0$ ,  $y + 3z - 10 = 0$  son perpendiculares.
29. Demostrar que las rectas  $x - 2y + 2 = 0$ ,  $2y + z + 4 = 0$  y  $7x + 4y - 15 = 0$ ,  $y + 14z + 40 = 0$  son perpendiculares.
30. Demostrar que la recta  $\frac{x-2}{10} = \frac{2y-2}{11} = \frac{z-5}{7}$  está situada en el plano  $3x - 8y + 2z - 8 = 0$ .  
Para demostrar que una recta está situada en un plano hay que comprobar que dos puntos de la recta pertenecen al plano, o bien, que un punto de la recta está situado en el plano y que dicha recta es perpendicular a él.
31. Demostrar que la recta  $y - 2x + 5 = 0$ ,  $z - 3x - 4 = 0$  está situada en el plano  $9x + 3y - 5z + 35 = 0$ .
32. Demostrar que la recta  $x - z - 4 = 0$ ,  $y - 2z - 3 = 0$  está situada en el plano  $2x + 3y - 8z - 17 = 0$ .
33. Demostrar que la recta  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$  está situada en el plano  $2x + 3y - 2z + 10 = 0$ .
34. Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta  $2x - y - 2z - 5 = 0$ ,  $4x + y + 3z - 1 = 0$  con el plano  $8x - y + z - 5 = 0$ . Sol.  $(3/2, 4, -3)$ .
35. Hallar el punto de intersección de la recta  $x = z + 2$ ,  $y = -3z + 1$  con el plano  $x - 2y - 7 = 0$ . Sol.  $(3, -2, 1)$ .
36. Hallar el punto de intersección de la recta  $\frac{x}{1} = \frac{2y-3}{1} = \frac{2z-1}{5}$  con el plano  $4x - 2y + z - 3 = 0$ . Sol.  $(1, 2, 3)$ .
37. Hallar el punto de intersección de la recta  $x + 2y + 4z - 2 = 0$ ,  $2x + 3y - 2z + 3 = 0$  con el plano  $2x - y + 4z + 8 = 0$ . Sol.  $(-4, 2, 1/2)$ .
38. Hallar las ecuaciones de la recta situada en el plano  $x + 3y - z + 4 = 0$  y que es perpendicular a la recta  $x - 2z - 3 = 0$ ,  $y - 2z = 0$  en el punto en que ésta corta a dicho plano. Sol.  $3x + 5y + 7 = 0$ ,  $4x + 5z + 1 = 0$ .
39. Demostrar que los puntos  $(2, -3, 1)$ ,  $(5, 4, -4)$  y  $(8, 11, -9)$  están en línea recta.
40. Hallar el punto de intersección de las rectas  $2x + y - 5 = 0$ ,  $3x + z - 14 = 0$  y  $x - 4y - 7 = 0$ ,  $5x + 4z - 35 = 0$ . Sol.  $(3, -1, 5)$ .
41. Hallar el punto de intersección de las rectas  $x - y - z + 8 = 0$ ,  $5x + y + z + 10 = 0$  y  $x + y + z - 2 = 0$ ,  $2x + y - 3z + 9 = 0$ . Sol.  $(-3, 3, 2)$ .
42. Hallar el punto de intersección de las rectas  $x + 5y - 7z + 1 = 0$ ,  $10x - 23y + 40z - 27 = 0$  y  $x - y + z + 1 = 0$ ,  $2x + y - 2z + 2 = 0$ . Sol.  $(-1/38, 148/38, 111/38)$ .
43. Escribir, en forma continua, las ecuaciones del lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos fijos  $(3, -1, 2)$ ,  $(4, -6, -5)$  y  $(0, 0, -3)$ .  
Sol.  $\frac{x}{16} = \frac{y+175/32}{13} = \frac{z+19/32}{-7}$ .
44. Escribir, en forma continua, las ecuaciones del lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos fijos  $(3, -2, 4)$ ,  $(5, 3, -2)$  y  $(0, 4, 2)$ .  
Sol.  $\frac{x-18/11}{26} = \frac{y}{22} = \frac{z+9/44}{27}$ .